
Physik II

Sommersemester 2026

Lecture Notes

Inhaltsverzeichnis

1	Wellen	1
1.1	Harmonische Wellen	1
1.2	Superposition	4
1.3	Stehende Wellen	5
1.4	Dopplereffekt	5
2	Elektrostatik	6
2.1	Energie einer Ladungsverteilung	6
2.2	Das elektrische Feld	7
2.3	Das Gauss'sche Gesetz	7
2.4	Die Energie des elektrischen Feldes	8
2.5	Elektrisches Potential	8
2.6	Mathematisches Interlude	9
3	Elektrische Leiter	10

Literatur

- [1] Wallny, Rainer: Wellenlehre, Elektrizität und Magnetismus. ETH Zürich, 2026

Physik II

Fynn Krebser—fkrebser@student.ethz.ch

Frühlingssemester 2026

Lec 1

1 Wellen

Um über Wellen zu sprechen, müssen wir zuerst auf eine Arbeitsdefinition einigen.

Definition 1.1: Welle

Eine **WELLE** ist eine zeitliche und räumliche Störung.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit $\vec{v}$ einer Welle ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Störung ausbreitet. Damit Verbunden ist ein Energieübertrag aber KEIN Materietransport.

Eine Welle wird durch die Wellenfunktion $\xi(x, t)$ beschrieben, welche die Auslenkung des Oszillators um die Ruhelage bei Ort x und Zeit t angibt.

Prinzipiell gibt es zwei Möglichkeiten, in welche Richtung eine Auslenkung stattfinden kann: Senkrecht zur Ausbreitungsrichtung **TRANSVERSAL** oder parallel zur Ausbreitungsrichtung **LONGITUDINAL**.

Wenn wir uns eine Welle als Feder-Masse System vorstellen, dann schwingt jede Masse um ihre Ruhelage und kehrt schliesslich in ihre Ruhelage zurück.

Eine Welle kann auf zwei Arten dargestellt werden: Einmal in einem ξ - x Diagramm, welches die Auslenkung ξ als Funktion des Ortes x zu einem festen Zeitpunkt t zeigt, oder in einem ξ - t Diagramm, welches die Auslenkung ξ als Funktion der Zeit t an einem festen Ort x zeigt.

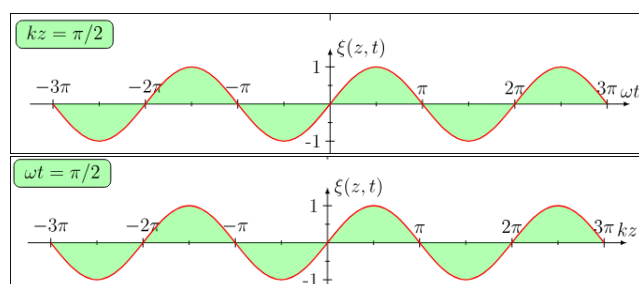


Abbildung 1: Oben: ξ - x Diagramm, Unten: ξ - t Diagramm

Üblicherweise verändert sich die Form eines Wellenberges mit der Zeit, dies wird **DISPERSION** genannt. Um die Rechnung zu vereinfachen, nehmen wir an, dass dies nicht passiert, also dass wir

$$\xi(x, t) = f(x \pm vt),$$

schreiben können. Hierbei zeigt das Minuszeichen dass die Welle nach Rechts geht und das bei Pluszeichen die Welle nach Links geht.

Proof. Wir gehen in ein Inertialsystem Σ' welches sich mit dem Wellenberg fortbewegt. In diesem System ist die Welle stationär, also

$\xi(x', t') = f(x')$. Anwendung der Galilei-Transformation $x' = x - vt$ und $t' = t$ ergibt die Behauptung. $\square$

In obiger Formel ist v sowohl die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle als auch die **PHASENGESCHWINDIGKEIT**.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit hängt ab vom Massenbelag sowie der Rückstellkraft der Feder. Die Phasengeschwindigkeit beschreibt die Geschwindigkeit, mit der sich die Wellenberge fortbewegen. Wir nennen $x \mp vt$ die **PHASE** δ_0 der Welle. Sei x die Koordinate des Wellenberges zur Zeit t . Nehmen wir nun an, dass die Phase δ_0 konstant bleibt, also $\delta_0 = x \mp vt = \text{const}$, so folgt durch Ableiten $\dot{x} = v$. Dies motiviert dass die Phasengeschwindigkeit v der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle entspricht.

1.1 Harmonische Wellen

Der Spezialfall einer Harmonischen Welle ist gegeben durch

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin[k(x \pm vt)].$$

Hierbei wird k als **WELLENZAHL** bezeichnet. In dieser Situation vollführt jeder Oszillator eine harmonische Schwingung aus. Weiter definieren wir die **WELLENLÄNGE** λ als den Abstand zwischen zwei Oszillatoren gleicher Phase, also

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}.$$

Lec 2

Proof. OBdA können wir die Welle bei $t = 0$ betrachten, also $\xi(x, 0) = \xi_0 \sin(kx)$. Nach der Definition der Wellenlänge muss $k(x + \lambda) = kx + 2\pi$ gelten, was die obige Formel für λ ergibt. $\square$

Betrachten wir nun die Welle bei $t = 0$, also ist

$$\xi(x', t_0 = 0) = \xi_0 \sin\left(2\pi \frac{x'}{\lambda}\right).$$

Wenn wir nun die Welle verschieben, können wir $x' = x \pm vt$ einsetzen und erhalten

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin\left(2\pi \frac{x \pm vt}{\lambda}\right) = \xi_0 \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda} \pm \frac{2\pi v}{\lambda} t\right).$$

Nehmen wir nun das spezielle $x = \lambda$, so erhalten wir

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi\lambda}{2\pi T} = \frac{\omega}{k}.$$

Setzen wir nun $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ein so erhalten wir

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx \pm \omega t).$$

Um die Formel zu verallgemeinern fügen wir den **NULL-PHASENWINKEL** φ_0 hinzu und erhalten

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx \pm \omega t + \varphi_0).$$

Leiten wir die Phase ab, so erhalten wir als Phasengeschwindigkeit

$$v = \frac{d}{dt}(kx \pm \omega t + \varphi_0) = \frac{\omega}{k}.$$

Um Rechnungen zu vereinfachen, können wir die komplexe Darstellung der Welle verwenden, also

$$\xi(x, t) = \xi_0 e^{i(kx \pm \omega t + \varphi_0)}.$$

Dabei entspricht die reale Komponente der komplexen Darstellung der Welle der ursprünglichen Welle.

Wenn wir zwei Oszillatoren betrachten, welche sich bei x_1 und x_2 befinden, so beträgt die Phasendifferenz

$$\Delta\varphi = k\Delta x > 0 \Rightarrow \omega = \dot{\varphi} = k\dot{x} = kv.$$

Theorem 1.2: Wellengleichung

Eine Wellengleichung wird beschrieben durch

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0.$$

Proof. Wir betrachten die Wellengleichung welche in positive x -Richtung läuft, also

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t).$$

Leiten wir dies zweimal nach der Zeit ab, so erhalten wir

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\xi_0 \omega^2 \sin(kx - \omega t).$$

Leiten wir die Ursprüngliche Welle zweimal nach x ab, so erhalten wir

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\xi_0 k^2 \sin(kx - \omega t).$$

Wir bemerken nun, dass

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{k^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

□

Hierbei sollten die Lösungen der Wellengleichung 2 mal stetig differenzierbar sein.

Theorem 1.3: Lösung der Wellengleichung

Die allgemeine Lösung der Wellengleichung ist gegeben durch

$$\xi(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt).$$

Der erste Term beschreibt eine Welle welche sich in positive x -Richtung bewegt, während der zweite Term eine Welle beschreibt welche sich in negative x -Richtung bewegt.

Beispiele beinhalten die Seilwelle, die Schallwelle, aber auch die elektromagnetische Welle.

Kehren wir zu transversalen Wellen zurück. Hierbei ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit $\vec{v}$ senkrecht zur Auslenkung ξ .

$$\vec{\xi}(z, t) = \vec{A}f(z - vt).$$

Explizit könne wir schreiben

$$\vec{\xi}(z, t) = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ 0 \end{pmatrix} \cos(kz - \omega t).$$

Wir wollen nun das Beispiel der transversalen Seilwelle betrachten. Von was, hängt $\vec{v}$ ab?.

INPUT PICTURE

Wir betrachten das Seil an den Punkten x und $x + dx$.

Zunächst definieren wir die **ZUGSPANNUNG** $\vec{S} = \frac{\vec{F}}{A}$, welche die Kraft pro Querschnittsfläche beschreibt.

Der Betrag der Spannung im Seil muss überall gleich sein, da sonst das Seil an der Stelle mit der grössten Spannung reissen würde. Weiter nehmen wir an, dass dm in Ruhe bleibt.

$$\Delta S_x = S \cos(\alpha') - S \cos(\alpha) \approx 0$$

$$\Delta S_y = S \sin(\alpha') - S \sin(\alpha).$$

Für den Tangens finden wir

$$\tan(\alpha) = \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \quad \tan(\alpha') = \frac{\partial \xi(x + dx, t)}{\partial x}.$$

Da $\sin \approx \tan$ für kleine Winkel gilt, können wir schreiben

$$\Delta S_y = S \left(\frac{\partial \xi(x + dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \right) = S \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx.$$

Verwenden wir nun $dS_y \cdot A = dma_y$, so erhalten wir schliesslich die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{S}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0.$$

Folglich ist

$$v = \pm \sqrt{\frac{S}{\rho}} = \pm \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

Wobei μ der lineare **MASSENBELAG** ist, also die Masse pro Länge.

Wir wollen unsere Konzepte nun auf mehrere Dimensionen erweitern. Zunächst auf Ebene Wellen. Die Wellenzahl wird neu zum **WELLENVEKTOR** $\vec{k}$, welcher die Richtung der Ausbreitung der Welle angibt. Die Phase wird neu zu $\delta = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$.

Folglich wird die harmonische Welle beschrieben durch

$$\xi(\vec{r}, t) = \vec{A} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}.$$

Definition 1.4: Ebene Welle

Der Geometrische Ort von Oszillatoren gleicher Phase ist eine Ebene senkrecht zur Ausbreitungsgeschwindigkeit. Weiter ist $\vec{v} \parallel \vec{k}$.

Diese Ebenen werden **WELLENFRONTEN** oder **PHASENFLÄCHEN** genannt.

Lec 3

Für eine ebene Harmonische Welle gilt die Wellengleichung

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \vec{A} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}.$$

Betrachten wir nun Zwei Punkte $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ in einer Ebene. Also $P_1, P_2 \in E \perp \vec{k}$. Da sie in Phase sind, gilt

$$\vec{k} \cdot \vec{r}_1 - \omega t = \vec{k} \cdot \vec{r}_2 - \omega t \Rightarrow \vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = 0.$$

Dies zeigt, dass $\vec{k} \perp E$ gilt, also dass die Wellenfronten Ebenen sind welche senkrecht zum Wellenvektor stehen.

Wir verwenden im folgenden die Konvention, dass

$$r_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

Für eine ebene transversale Welle gilt

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \tilde{A}_x \\ \tilde{A}_y \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)}.$$

ObdA können wir dies vereinfachen zu

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y e^{i\Delta\delta} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)}.$$

Definition 1.5: lineare Polarisation

Wenn $\Delta\delta = 0$ oder π gilt, so ist die Welle linear polarisiert.

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)}.$$

Definition 1.6: zirkulare Polarisation

Wenn $\Delta\delta = \pm\frac{\pi}{2}$ gilt, und $A_x = A_y$ gilt, so ist die Welle zirkular polarisiert.

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = A \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)}.$$

Bei positivem Vorzeichen wird die Welle zB bei $z = 0$ zu

$$\vec{\xi}(z = 0, t) = A_0 \cos(\omega t) \hat{x} + A_0 \sin(\omega t) \hat{y}.$$

Bei negativem Vorzeichen wird die Welle zu

$$\vec{\xi}(z = 0, t) = A_0 \cos(\omega t) \hat{x} - A_0 \sin(\omega t) \hat{y}.$$

Wir nennen die Welle **RECHTSZIRKULAR** wenn $\Delta\delta = +\frac{\pi}{2}$ gilt, und **LINKSZIRKULAR** wenn $\Delta\delta = -\frac{\pi}{2}$ gilt.

Der allgemeine Fall ist die elliptische Polarisation, bei welchem sich die Spitze des Auslenkungsvektors auf einer Ellipse bewegt.

Im Raum, verallgemeinert sich die Wellengleichung wie folgt

Definition 1.7: Wellengleichung im Raum

Eine Wellengleichung im Raum wird beschrieben durch

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - v^2 \nabla^2 \xi = 0.$$

In Kugelkoordinaten wird die Wellengleichung zu (im Fall von radialsymmetrischen Wellen)

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \xi.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist gegeben durch¹

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{A}_1}{r} f_1(kr - \omega t) + \frac{\vec{A}_2}{r} f_2(kr + \omega t).$$

¹In 2 Dimensionen wäre die Amplitude proportional zu $\frac{1}{\sqrt{r}}$

Gehen wir nun zurück zum eindimensionalen Fall mit einer transversalen Welle. Die Geschwindigkeit eines einzelnen Oszillators ist gegeben durch

$$v_\xi = \frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

Die kinetische Energie eines Massenelements dm ist gegeben durch

$$dT = \frac{1}{2} v^2 dm.$$

Einsetzen von $dm = \rho dV$ gibt

$$\frac{dT}{dV} = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2.$$

Dies ist die kinetische Energiedichte der Welle. Sie gibt an wie viel kinetische Energie pro Volumen in der Welle gespeichert ist.

Für die elastische Energiedichte haben wir eine elongierte Feder, welche die Längenänderung

$$ds = \sqrt{dx^2 + d\xi^2} - dx \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Folglich ist die elastische Energiedichte

$$\frac{dE_{el}}{dV} = \frac{1}{2} S \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2.$$

Wie teilt sich nun die Energie auf die beiden Freiheitsgrade auf? Es gilt für eine Welle

$$\xi(x, t) = f(x - vt).$$

Folglich können wir rechnen

$$\frac{dT}{dV} = \frac{1}{2} \rho v^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 = -v \frac{\partial f}{\partial (x - vt)}.$$

Ebenso können wir rechnen

$$\frac{dE_{el}}{dV} = \frac{1}{2} S \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 = v \frac{\partial f}{\partial (x - vt)}.$$

$$\frac{dW}{dV} = \frac{dT}{dV} + \frac{dE_{el}}{dV} = \rho v^2 \left(\frac{\partial f}{\partial (x - vt)} \right)^2.$$

Lec 4

Diese Gleichung gilt nur für mechanische Wellen. Wir fassen zusammen:

Tabelle 1: Mechanische Wellen

Typ	Ausbreitungsgeschwindigkeit
Seilwelle	$v = \sqrt{\frac{S}{\rho}}$
Welle im Festkörper	$v_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$
	$v_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$
Schallwelle	$v = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}}$
	$\kappa = \chi P$

Wir möchten nun über die Intensität I und die Energief-lussdicht $\vec{S}$ einer Welle sprechen, wobei $|\vec{S}| = I$ gilt.

Als Beispiel nehmen wir eine harmonisch Fortschreitende Welle

$$\xi(x, t) = A \cos(kx - \omega t) \quad v = \frac{\omega}{k}.$$

Die Energiedichte ist wie vorher berechnet gegeben durch

$$\frac{dW}{dV} = \rho v^2 \xi'^2.$$

Wobei $\xi' = \frac{\partial f}{\partial(x-vt)} = k \frac{\partial \xi}{\partial(x-vt)}$. Wenn wir dies ausrechnen, so erhalten wir

$$\frac{dW}{dV} = \rho v^2 k^2 A^2 \sin^2(kx - \omega t) = A^2 \rho \omega^2 \sin^2(kx - \omega t).$$

Dies hat auch eine Form von $f(x - vt)$. Also wird Energie transportiert bei einem Wellenphänomen. Jedoch ist die Energiedichte positiv definit. Weiter ist die Energie proportional zu A^2 und ω^2 .

Das zeitliche Mittel der Energiedichte ist gegeben durch

$$\langle \frac{dW}{dV} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dW}{dV} dt = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2.$$

Die Intensität ist nun Definiert als die Leistung, welche durch eine Fläche A senkrecht zur Ausbreitungsrichtung transportiert wird, pro Flächeneinheit. Also

$$I = \frac{d^2W}{dadt}.$$

Umformen gibt

$$\begin{aligned} I &= \frac{d^2W}{dadx \frac{dt}{dx}} \\ &= \frac{dW}{dV} v \\ &. \end{aligned}$$

wobei wir ein wenig schludern und das d^2W durch dW ersetzen, lol.

Eine weitere legitime Frage ist was passiert wenn wir eine komplizierte Oberfläche haben. In diesem Fall definieren wir den **POYNTING VEKTOR** $\vec{S}$, welcher die Stärke von I hat und die Richtung von k . Dann gilt

$$\frac{dW}{dt} = \iint_A \vec{S} \cdot d\vec{a}.$$

Für eine Kugelwelle mit Oberfläche einer Kugel mit Radius r sehen wir, dass

$$\dot{W} = 2\pi \rho \omega^2 A_0^2 v.$$

Somit hängt die Leistung nicht von r ab, was die Energieerhaltung bestätigt.

1.2 Superposition

Wenn ξ_1 und ξ_2 Lösungen der Wellengleichung sind, so ist auch $\xi = \xi_1 + \xi_2$ eine Lösung der Wellengleichung. Dies wird als Superposition bezeichnet.

Betrachten wir zunächst die Überlagerung zweier harmonischen Wellen in einem eindimensionalen Raum.

$$\begin{aligned} \xi_1(x, t) &= A \cos(kx - \omega t) \\ \xi_2(x, t) &= A \cos(kx \mp \omega t + \delta). \end{aligned}$$

Im ersten Fall betrachten wir, wenn beide Wellen in die gleiche Richtung laufen. Ausserdem seien der Einfachheit die Amplituden gleich. Dann können wir rechnen

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= \xi_1 + \xi_2 \\ &= A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx - \omega t + \delta) \\ &= 2A \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t - \frac{\delta}{2}\right). \end{aligned}$$

Wir sehen, dass die Amplitude maximal ist, wenn $\delta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ gilt, und dass die Amplitude minimal (gleich null) ist, wenn $\delta = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ gilt. Dies wird als **KONSTRUKTIVE INTERFERENZ** bzw **DESTRUKTIVE INTERFERENZ** bezeichnet.

Wenn die Wellen gegenläufig laufen, so können wir rechnen

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= \xi_1 + \xi_2 \\ &= A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t + \delta) \\ &= 2A \sin\left(kx + \frac{\delta}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\delta}{2}\right). \end{aligned}$$

Wenn wir nun zwei Wellen haben, welche von einem Punkt Q_1 und Q_2 ausgehen, so gilt an einem Punkt P :

$$\xi(x, t) = A(\sin(kx_1 - \omega t) + \sin(kx_2 - \omega t + \delta)).$$

Wir definieren den **GANGUNTERSCHIED** Δx als

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

Wenn wir nun $x := x_1$ und $x + \Delta x := x_2$ setzen, so können wir rechnen

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= A(\sin(kx - \omega t) + \sin(k(x + \Delta x) - \omega t + \delta)) \\ &= 2A \cos\left(\frac{k\Delta x + \delta}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{k\Delta x + \delta}{2}\right). \end{aligned}$$

Konstruktive Interferenz tritt auf, wenn $k\Delta x + \delta = 2\pi n$ gilt, also wenn

$$\Delta x = \frac{2\pi n - \delta}{k} = n\lambda - \frac{\delta}{k}.$$

Destruktive Interferenz tritt auf, wenn $k\Delta x + \delta = (2n+1)\pi$ gilt, also wenn

$$\Delta x = \frac{(2n+1)\pi - \delta}{k} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda - \frac{\delta}{k}.$$

Damit Interferenz überhaupt stattfinden kann, müssen die zeitliche und räumliche Kohärenz gegeben sein. Die zeitliche Kohärenz bedeutet, dass der Nullphasenwinkel δ konstant bleibt, also dass die Wellen eine feste Phasendifferenz haben. Die räumliche Kohärenz bedeutet, dass die Wellen überhaupt eine Chance haben zu interferieren, also dass die Wellenfronten sich überlappen.

Wenn eine Welle auf ein Hindernis trifft, wird sie reflektiert. Dabei wird unterschieden zwischen einem fixen und offenen Ende. Bei einem fixen Ende wird die Welle mit einem Phasenunterschied von π reflektiert. Bei einem offenen Ende wird die Welle ohne Phasenunterschied reflektiert.

Wenn eine Welle nun aber auf so eine Grenzfläche trifft, so wird sie nicht nur reflektiert, sondern auch transmittiert,

also durchgelassen. Dies kann in einem Seil zum Beispiel durch eine Änderung des Massenbelags realisiert werden.

Folglich existieren 3 Wellen.

$$\begin{aligned}\xi_A &= A \exp(i(+k_1x - \omega t)) \\ \xi_R &= R \exp(i(-k_1x - \omega t + \delta_R)) \\ \xi_T &= T \exp(i(+k_2x - \omega t + \delta_T)).\end{aligned}$$

Eine Sinnvolle Annahme ist, dass die Wellen an der Grenzfläche $x = 0$ stetig sind, also dass

$$\xi_A(0, t) + \xi_R(0, t) = \xi_T(0, t).$$

Weiter müssen die Kräfte an der Grenzfläche ebenfalls stetig sein, also dass

$$S_1 \frac{\partial}{\partial x}(\xi_A + \xi_R) = S_2 \frac{\partial}{\partial x} \xi_T.$$

Nach rechnen (siehe Serie), erhalten wir den Parameter

$$\alpha = \sqrt{\frac{S_2 \rho_2}{S_1 \rho_1}}.$$

Dieser Parameter gibt an wie stark die Welle reflektiert bzw transmittiert wird. Es gilt für die Parameter δ_R und δ_T :

$$\delta_R = \begin{cases} 0 & \alpha < 1 \\ \pi & \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\delta_T = 0.$$

Hierbei entspricht der Fall von einem "dünnen Ende zu einem Dichten gehen ist $\delta_R = \pi$ und der Fall von einem "dicken Ende zu einem dünnen Ende ist $\delta_R = 0$. Dies entspricht intuitiv der Tatsache, dass die Welle an einem fixen Ende mit einem Phasenunterschied von π reflektiert wird, und an einem offenen Ende ohne Phasenunterschied reflektiert wird.

Für die Amplituden R und T gilt

$$A^2 = R^2 + \frac{v_1}{v_2} T^2.$$

1.3 Stehende Wellen

Wir betrachten nun 2 eindimensionale fortschreitende Wellen welche in entgegengesetzte Richtungen laufen. Es gilt

$$\begin{aligned}\xi_1(x, t) &= A \cos(kx - \omega t) \\ \xi_2'(x, t) &= A \cos(kx + \omega t + \delta).\end{aligned}$$

Wir können die Zweite Welle noch umschreiben zu

$$\xi_2(x, t) = A \cos(-kx - \omega t + \delta_R).$$

Die Superposition der beiden Wellen ist gegeben durch

$$\xi(x, t) = 2A \cos\left(kx - \frac{\delta_R}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\delta_R}{2}\right).$$

Wenn wir für die gegenläufige Welle eine Reflexion an einem harten Ende betrachten, so gilt $\delta_R = \pi$. Somit erhalten wir

$$\xi(x, t) = 2A \sin(kx) \sin(\omega t).$$

In diesem Fall haben wir bei $x = 0$ und $x = L$ einen Knoten.

Wenn wir für die gegenläufige Welle eine Reflexion an einem offenen Ende betrachten, so gilt $\delta_R = 0$. Somit erhalten wir

$$\xi(x, t) = 2A \cos(kx) \cos(\omega t).$$

In diesem Fall haben wir bei $x = 0$ und $x = L$ einen Bauch.

Für die Energiedichte einer stehenden Welle gilt

$$\frac{dT}{dV} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 4A^2 \cos^2(kx) \sin^2(\omega t).$$

Und für die elastische Energiedichte gilt

$$\frac{dE_{el}}{dV} = \frac{1}{2} S 4A^2 k^2 \sin^2(kx) \cos^2(\omega t).$$

Wenn man dies plotten würde, so sehen wir, dass die kinetische und elastische Energie sich gegenseitig austauschen, aber dass die Gesamtenergie konstant bleibt.

Bei einer Reflexion am fixen Ende gilt: Für $\omega t = n\pi$ ist $\xi = 0$ und für $\omega t = (n + \frac{1}{2})\pi$ ist ξ maximal und nur elastisch.

Die Einhüllende ist gegeben durch

$$u(x) = a \cos(kx) + B \sin(kx).$$

Bei einer fest eingespannten Saite gilt $u(0) = u(L) = 0$. Dies führt zu der Bedingung

$$\sin(k_n L) = 0.$$

Also $k_n = \frac{n\pi}{L}$, und somit $\omega_n = \frac{n\pi v}{L}$, und die Wellenlänge ist gegeben durch $\lambda_n = \frac{2L}{n}$.

Hierbei sind nur diskrete Werte von k und ω erlaubt, welche als Eigenfrequenzen bezeichnet werden.

Ähnlich ist die Situation bei 2 offenen Enden, wobei die Eigenfrequenzen die gleichen sind, aber die Eigenmoden sich unterscheiden.

Bei nur einer Seite offen, und der anderen Seite geschlossen, so gilt die Bedingung

$$\sin(k_n L) = 0 \quad \text{und} \quad \cos(k_n L) = 0.$$

Dies führt zu der Bedingung

$$k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L}.$$

1.4 Dopplereffekt

Schallwellen sind Longitudinale Druckwellen, welche sich in einem Medium ausbreiten.

Der Dopplereffekt nimmt sich 3 Bezugssysteme zur Hand, dies des Senders, des Empfängers und des Mediums.

Für eine Wahrgenommene Frequenz eines Senders, welcher sich mit der Geschwindigkeit v_Q bewegt, gilt und eines Beobachters, welcher sich mit der Geschwindigkeit v_B bewegt, gilt

$$f' = f_Q \frac{u \pm v_B}{u \mp v_Q}.$$

Wir wollen dies nun motivieren. Dazu betrachten wir zunächst die Situation, dass der Sender sich nicht bewegt,

also $v_Q = 0$ gilt. Die Anzahl Wellenberge für einen ruhenden Beobachter ist

$$n_\lambda = f_Q \Delta t.$$

Die Anzahl Wellenberge für einen bewegten Beobachter ist

$$n'_\lambda = f_Q \Delta + \frac{v_B \cdot \Delta t}{\lambda}.$$

Wobei dies für einen Beobachter gilt, welcher sich auf den Sender zu bewegt. Für einen Beobachter, welcher sich von dem Sender weg bewegt, ist ein Minuszeichen vor dem zweiten Term.

Da die Schallgeschwindigkeit u gegeben ist durch $u = f_Q \lambda$, können wir umformen zu

$$f' = f_Q + f_Q \frac{v_B}{u} = f_Q \frac{u + v_B}{u}.$$

Analog finden wir, wenn sich die Quelle bewegt, dass

$$f' = f_Q \frac{u}{u - v_Q}.$$

Wobei dies für eine Quelle gilt, welche sich auf den Beobachter zu bewegt. Für eine Quelle, welche sich von dem Beobachter weg bewegt, ist ein Minuszeichen vor v_Q .

2 Elektrostatik

Lec 6

In der Elektrostatik beschäftigen wir uns mit elektrischen **LADUNGEN** welche sich in Ruhe befinden. Empirisch wissen wir, dass es 2 Arten von Ladungen gibt, welche wir als + und - bezeichnen. Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab, entgegengesetzte Ladungen ziehen sich an.

Die Menge von Ladungen können mit einem Elektroskop gemessen werden, welches eine Ladung durch die Abweichung von 2 Metallblättern anzeigt. Dabei kann auch das Phänomen der **INFLUENZ** beobachtet werden, welches besagt, dass eine Ladung in der Nähe eines leitenden Körpers eine Ladung auf diesem induzieren kann, welche die gleiche Ladung wie die ursprüngliche Ladung hat aber mit entgegengesetztem Vorzeichen.

Das moderne Bild ist das wir das Elektron haben, welches die Ladung $-e$ trägt, wobei $e = 1.602 \cdot 10^{-19} C$ gilt.

Ladung bleibt immer erhalten, das heisst die Summe aller Ladungen in einem abgeschlossenen System bleibt konstant.

Wir schreiben Linienladungen als $\lambda = \frac{dq}{dx}$, Flächenladungen als $\sigma = \frac{dq}{dA}$ und Volumenladungen als $\rho = \frac{dq}{dV}$.

Leiter sind Objekt, in welchen sich Teilchen frei bewegen können, während in Isolatoren Ladungen kleben bleiben.

Eines der Zentralen Gesetze der Elektrostatik ist das Coulombsche Gesetz.

Theorem 2.1: Coulomb'sches Gesetz

Die Kraft zwischen 2 Punktladungen q_1 und q_2 im Vakuum ist gegeben durch

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}.$$

Ausserdem ist das Superpositionsprinzip von fundamentaler Bedeutung. Es besagt, dass die Kraft auf eine Ladung q durch mehrere andere Ladungen die Summe der Kräfte ist, welche durch jede einzelne Ladung verursacht wird.

Die Stärke der elektrischen Kraft ist um viele Grössenordnungen stärker als die Stärke der Gravitationskraft.

2.1 Energie einer Ladungsverteilung

Energie ist gespeicherte Arbeit in einem System. Wir definieren eine externe Arbeit W_{ext} , als die Arbeit, welche von einer externen Kraft auf das System verrichtet. Sie ist positiv, wenn die externe Kraft Arbeit verrichtet, und negativ, wenn die externe Kraft Arbeit verrichtet bekommt.

Nehmen wir OBdA an, dass $q_1, q_2 > 0$. Die erste Ladung können wir einfach hinstellen, es gibt keine Arbeit, welche von einer externen Kraft verrichtet werden muss.

Bei der zweiten Ladung müssen wir eine Arbeit verrichten, um sie von unendlich nach r zu bringen. Diese Arbeit ist gegeben durch

$$W = \int_{\infty}^{r_{21}} \vec{F}_{\text{ext}} \cdot d\vec{s} = - \int_{\infty}^{r_{21}} \vec{F}_{21} \cdot d\vec{s}.$$

Wenn wir den direkten Weg von unendlich nach r nehmen, so gilt $d\vec{s} = \hat{r}_{21} dr$. Wir können dies tun, da die senkrechte Komponente der Kraft keinen Beitrag zur Arbeit leisten würde, weshalb dieser spezifische Weg gewählt werden kann. Somit erhalten wir

$$W = - \int_{\infty}^{r_{21}} k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{21} \cdot \hat{r}_{21} dr = k \frac{q_1 q_2}{r_{21}}.$$

Im allgemeinen finden wir für N Ladungen, dass die Energie gegeben ist durch

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_j \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}.$$

2.2 Das elektrische Feld

Die Fernwirkung von Ladungen kann durch das Konzept des elektrischen Feldes erklärt werden.

Definition 2.2: Elektrisches Feld

Das elektrische Feld $\vec{E}$ an einem Punkt im Raum ist definiert als die Kraft pro Ladung, welche auf eine Testladung q an diesem Punkt wirkt, wenn q gegen null geht. Also

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q}.$$

Per Konvention ist dabei die Testladung positiv, damit die Richtung des elektrischen Feldes mit der Richtung der Kraft übereinstimmt.

Wenn wir die Feldlinien einzeichnen, so gilt, dass die Dichte der Feldlinien proportional zur Stärke des elektrischen Feldes ist, und dass die Richtung der Feldlinien die Richtung des elektrischen Feldes angibt. Also zeigen die Feldlinien von positiven Ladungen weg, und zu negativen Ladungen hin.

Ausserdem beginnen und Enden die Feldlinien immer an Ladungen, oder gehen ins Unendliche.

Für eine Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ ist das elektrische Feld gegeben durch

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{r} dV'.$$

Wichtig ist, dass diese Formel nur im elektrostatischen Fall gilt.

Lec 7

2.3 Das Gauss'sche Gesetz

Das Gauss'sche Gesetz ist unsere erste Maxwell Gleichung. Wir können damit das elektrische Feld für einen hochsymmetrischen Fall finden.

Wir haben bereits gesagt, dass der Betrag des elektrischen Feldes proportional zur Anzahl Feldlinien pro Flächeneinheit ist. Wir definieren nun

Definition 2.3: Elektrischer Fluss

Der Elektrische Fluss Φ_E durch eine Fläche A ist definiert als

$$\Phi_E = \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{a}.$$

In Worten ist der Elektrische Fluss die Anzahl der Feldlinien, welche durch die Fläche A gehen.

Wenn wir nun einen Würfel in einem homogenen elektrischen Feld platzieren, so sehen wir dass die Anzahl der Feldlinien, welche in den Würfel hinein gehen, gleich der Anzahl der Feldlinien ist, welche aus dem Würfel heraus gehen. Also

$$\Phi_E = \oiint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{a} = 0.$$

Doch was, wenn wir eine Ladung in unser Volumen legen. Nehmen wir an, wir platzieren eine Punktladung in eine Kugel. Dann können wir rechnen

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \oiint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{a} \\ &= \oiint_{\partial V} k \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{r} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= 4\pi k q = \frac{q}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$

Dies motiviert das Gauss'sche Gesetz, welches besagt, dass der Elektrische Fluss durch eine geschlossene Fläche gleich der eingeschlossenen Ladung geteilt durch ϵ_0 ist. Also

Theorem 2.4: Gauss'sches Gesetz

Es gilt

$$\oiint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}.$$

Als erstes Beispiel betrachten wir eine Kugelschale mit homogener Ladungsverteilung. Aus Symmetriegründen muss das elektrische Feld radial sein, also $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ gilt. Für $r < R$ gilt

$$\Phi_E = 4\pi r^2 E(r) = 0 \Rightarrow E(r) = 0.$$

Für $r > R$ gilt

$$\begin{aligned} \oiint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{a} &= \frac{Q}{\epsilon_0} \\ 4\pi r^2 E(r) &= \frac{Q}{\epsilon_0} \\ E(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \\ \vec{E}(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}. \end{aligned}$$

Wir können also nicht unterscheiden ob wir eine Punktladung am Ursprung haben, oder eine Kugelschale mit Ladung Q und Radius R am Ursprung haben, solange wir uns ausserhalb der Kugel befinden.

Als zweites Beispiel nehmen wir einen unendlich langen, gerade Draht, mit der Ladungsdichte λ . Aus Symmetriegründen muss das elektrische Feld radial sein, also $\vec{E} =$

$E(r)\hat{r}$ gilt. Wir wählen als geschlossene Fläche einen Zylinder mit Radius r und Länge L . Dann gilt

$$\begin{aligned}\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{a} &= \frac{Q}{\epsilon_0} \\ 2\pi r L E(r) &= \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \\ E(r) &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \\ \vec{E}(r) &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \hat{r}\end{aligned}$$

Als drittes Beispiel nehmen wir eine unendlich ausgedehnte, gerade Platte, mit der Flächenladungsdichte σ . Aus Symmetriegründen muss das elektrische Feld senkrecht zur Platte sein, also $\vec{E} = E(z)\hat{z}$ gilt. Wir wählen als geschlossene Fläche einen Zylinder mit Grundfläche A und Höhe $2h$, welcher senkrecht zur Platte steht. Dann gilt

$$\begin{aligned}\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{a} &= \frac{Q}{\epsilon_0} \\ 2AE(z) &= \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \\ E(z) &= \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma \\ \vec{E}(z) &= \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma \hat{z}\end{aligned}$$

Dieses letzte Beispiel führt uns zum Konzept des Plattenkondensators. Dieser besteht aus 2 parallelen Platten, welche eine Ladung $+Q$ und $-Q$ tragen, und welche durch einen Abstand d getrennt sind. Innerhalb des Kondensators verstärken sich die elektrischen Felder der beiden Platten, so dass das elektrische Feld innerhalb des Kondensators gegeben ist durch

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \hat{z}.$$

Ausserhalb des Kondensators löschen sich die elektrischen Felder der beiden Platten gegenseitig aus, so dass das elektrische Feld ausserhalb des Kondensators null ist.

2.4 Die Energie des elektrischen Feldes

Das elektrische Feld speichert Energie, welche wir mit der Energiedichte u beschreiben. Sie ist definiert als

$$u = \frac{dE}{dV} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2.$$

Um dies zu motivieren, betrachten wir einen Luftballon mit Ladungsdichte σ und Radius R . Wenn wir nun den Radius von R auf $R - dR$ verkleinern, so müssen wir eine Arbeit verrichten.

Das Volumen nach der Kompression ist gegeben durch

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi(R - dR)^3 \approx \frac{4}{3}\pi R^3 - 4\pi R^2 dR.$$

Somit ist die Änderung des Volumens gegeben durch

$$dV = 4\pi R^2 dR.$$

Somit ist die Raumladungsdichte gegeben durch

$$\rho = \frac{dq}{dV} = \frac{q}{4\pi R^2 dR} \text{ für } R < r < R + dR.$$

Mit dem Satz von Gauss können wir das elektrische Feld berechnen, welches gegeben ist durch

$$E(r) = \frac{1}{12\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2 dR} (r^3 - R^3).$$

Mit der Substitution $r = R + x$ erhalten wir näherungsweise

$$E(r) = E_{\text{ausser}} \frac{r - R}{dR}.$$

Dies erzeugt somit einen elektrostatischen Druck

$$p(r) = \frac{d(qE)}{dA} = E \frac{dq}{dA} = \epsilon_0 E_{\text{ausser}}^2 \frac{r - R}{dR}.$$

Integrieren wir dies von R bis $R + dR$, so erhalten wir die Arbeit, welche von der externen Kraft verrichtet werden muss, um den Ballon zu komprimieren, gegeben durch

$$W_{\text{ext}} = \int_R^{R+dR} p(r) dr = \frac{\epsilon_0}{2} E_{\text{ausser}}^2 4\pi R^2 dR.$$

Dies ist genau die Energie, welche im elektrischen Feld gespeichert ist, also

$$W_{\text{ext}} = u dV.$$

Lec 8

2.5 Elektrisches Potential

Wenn wir eine Ladung von einem Punkt B zu einem Punkt A bewegen, so müssen wir eine Arbeit verrichten, welche gegeben ist durch

$$W_{BA} = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Dabei verschwinden die senkrechten Komponenten der Kraft, und nur die Senkrechten bleiben übrig. Das elektrische Feld ist also konservativ, analog zur Gravitationskraft, und es existiert somit ein Potential, gegeben durch

Definition 2.5: Elektrisches Potential

Das Elektrische Potential ist definiert als

$$\vec{E} = -\nabla V.$$

Das Potential impliziert ausserdem, dass $\nabla \times \vec{E} = 0$

Somit ist

$$\Phi_{BA} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = V(B) - V(A).$$

Typischerweise wird der Nullpunkt des Potentials am Unendlichen gesetzt, so dass $V(\infty) = 0$ gilt.

Wenn wir eine Potentialänderung $d\varphi$ über eine Strecke ds haben, so gilt

$$d\varphi = -\vec{E} \cdot d\vec{s} \Rightarrow E = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Der Gradient zeigt immer in die Richtung des grössten Anstiegs. Folglich ist Senkrecht zum Gradienten eine Fläche, mit konstantem Potential, genannt **ÄQUIPOTENTIALFLÄCHE**.

Bei mehreren Ladungen, ist nach dem Superpositionsprinzip das Potential die Summe der Potentiale, welche von jeder Ladung verursacht werden. Also

$$\varphi_{\text{total}} = \sum_i \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}.$$

Bei einer kontinuierlichen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ ist das Potential gegeben durch

Theorem 2.6: Potential einer Ladungsverteilung

Es gilt

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'.$$

Die Potentielle Energie an einem Ort $\vec{r}$ ist gegeben durch

$$E_{\text{pot}} = q\varphi(\vec{r}).$$

Wenn man somit ein $\rho(\vec{r})$ basteln will, muss ab der zweiten Ladung Arbeit verrichtet werden.

Theorem 2.7: Energie im Elektrischen Feld

Es gilt

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r}) dV.$$

Wir wissen, dass $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ gilt, somit²

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \iiint_{\mathbb{R}^3} \nabla \cdot \vec{E} \varphi dV \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \phi(\vec{r}) E(\vec{r})|_{\mathbb{R}^3} - \frac{1}{2} \epsilon_0 \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{E} \cdot \nabla \varphi dV \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \iiint_{\mathbb{R}^3} E^2 dV. \end{aligned}$$

Mit der Energiedichte $u = \frac{W}{V}$ sehen wir

$$u = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r}).$$

Als einfaches Beispiel betrachten wir einen Plattenkondensator mit Plattenfläche A und Plattenabstand d . Angenommen auf einer Platte sei das Potential Φ und auf der anderen 0. Dann ist

$$\phi_{BA} = - \int_{z_a}^{z_b} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E\Delta z.$$

Hier ist nun Möglich, dass die Arbeit negativ ist, obwohl $\Delta\phi$ positiv ist, da die Ladung negativ sein könnte. Für $\Delta z = d$ erhalten wir

$$E = \frac{\Phi}{d}.$$

Beim Potential einer Punktladung q am Ursprung gilt

$$\int_{BA} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

²Die Herleitung ist nicht ganz korrekt, bei der partiellen integration müsste ein Oberflächenintegral auftauchen, welches aber verschwindet, da das Potential am Unendlichen null ist.

2.6 Mathematisches Interlude

Die folgenden Sätze aus der Vektoranalysis sind von fundamentaler Bedeutung für die Elektrodynamik.

Theorem 2.8: Satz von Gauss

Es gilt

$$\oiint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{a} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV.$$

Theorem 2.9: Satz von Stokes

Es gilt

$$\oint_{\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_A \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{a}.$$

Wenden wir den Satz von Gauss auf das Gauss'sche Gesetz an, finden wir

$$\oiint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV.$$

Da dies für jedes Volumen V gilt, muss die Integranden gleich sein, also

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Daraus folgen auch die Laplace und Poissongleichung.

Theorem 2.10: Poissongleichung

Es gilt

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

In kartesischen Koordinaten ist die Poissongleichung gegeben durch

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Für den Fall, dass in unserem Volumen $\rho = 0$ ist haben wir den Spezialfall der Laplacegleichung

$$\nabla^2 \varphi = 0.$$

Mit dem Satz von Stokes finden wir für die Elektrostatik

$$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_A \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{a} = 0.$$

Da dies für jede Fläche A gilt, muss die Integranden gleich null sein, also

$$\nabla \times \vec{E} = 0.$$

Achtung. Dies gilt nur in der Elektrostatik, in der Elektrodynamik gilt dieses Gesetz nicht mehr.

3 Elektrische Leiter

Isolatoren sind Materialien, in welchen sich Ladungen nicht frei bewegen können, während in Leitern Ladungen frei beweglich sind. Aktuell betrachten wir den Prozess des Bewegens nicht.

Wenn wir einen Leiter ohne externes Elektrisches Feld haben, so bewegen sich die Ladungen an den Rand des Leiters, so dass das elektrische Feld innerhalb des Leiters null ist. Mit einem externen Elektrischen Feld, so bewegen sich die Ladungen ebenfalls an den Rand des Leiters, so dass das elektrische Feld innerhalb des Leiters null ist.

Im Volumen des Leiters liefert das Gauss'sche Gesetz, dass

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0.$$

Leiter werden durch ein externes elektrisches Feld beeinflusst und umgekehrt.

Im wesentlichen haben elektrische Leiter 4 wichtige Eigenschaften:

- Innerhalb des Leiters ist $\rho = 0$. Ladungen sind immer auf der Oberfläche.
- Das elektrische Feld innerhalb des Leiters ist null. Ausserhalb ist $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$.
- Spitzeneffekt: Die Oberflächenladungsdichte hängt von der Krümmung der Oberfläche ab, so dass die Ladungsdichte an spitzen Stellen höher ist als an flachen Stellen.

Das E Feld ausserhalb ist parallel zum Normalenvektor $\hat{n}$, da sonst eine tangentielle Komponente des elektrischen Feldes existieren würde, welche Ladungen bewegen würde, was im Gleichgewicht nicht möglich ist.

Ausserdem ist die Oberfläche eine Äquipotentialfläche.

Index

destruktive Interferenz, 4

Dispersion, 1

Gangunterschied, 4

Influenz, 6

konstruktive Interferenz, 4

Ladungen, 6

Linkszirkular, 3

longitudinal, 1

Massenbelag, 2

Nullphasenwinkel, 1

Phase, 1

Phasenflächen, 2

Phasengeschwindigkeit, 1

Poynting Vektor, 4

Rechtszirkular, 3

transversal, 1

Welle, 1

Wellenfronten, 2

Wellenlänge, 1

Wellenvektor, 2

Wellenzahl, 1

Zugspannung, 2

Äquipotentialfläche, 9